Schwerpunkt legen auf

a) Holomorphie der Abbildungen oder
b) Birationalität der Abbildungen oder
c) Erhalt metrischer Eigenschaften

usw. Keine dieser Verallgemeinerungen wird hier besprochen. Auf einige der bei Verallgemeinerungen wichtigen Aspekte wird jedoch in Abschnitten eingegangen, die bei einer ersten Lektüre überschlagen werden können.

§1. Die obere Halbebene

In diesem Paragrafen wird die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{C}$ genauer untersucht. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ wird beschrieben. Dann wird die hyperbolische Geometrie entwickelt.

1. Gebrochen lineare Transformationen. Wir schreiben 2×2 Matrizen meist in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und benutzen wie üblich für *Determinante* und *Spur* die Abkürzungen

$$\det M := ad - bc\ ,\ \operatorname{Sp} M := a + d\ ,$$

sowie

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

für die *transponierte* bzw. *adjungierte* Matrix. Es bezeichne $GL(2;\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 Matrizen,

$$GL(2;\mathbb{C}) := \{M \in \operatorname{Mat}(2;\mathbb{C})\ ;\ \det M \neq 0\}\ .$$

Mit E wird die Einheitsmatrix abgekürzt. Bekanntlich wird die inverse Matrix zu $M \in GL(2;\mathbb{C})$ gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, M^\sharp = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Für $M \in GL(2;\mathbb{C})$ ist unter offensichtlichen Voraussetzungen an $\tau \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl

(1) $$M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

wohldefiniert. Damit wird durch

(2) $$\Phi_M : \tau \mapsto M\tau$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ gegeben, die auch als *gebrochen lineare Transformation* oder als MÖBIUS–*Transformation* bezeichnet wird. Für $c = 0$ ist Φ_M eine ganze Funktion. Im Fall $c \neq 0$ hat Φ_M genau einen Pol und zwar von 1. Ordnung bei $\tau = -d/c$.

Warnung: Die Schreibweise $M\tau$ darf nicht mit der skalaren Multiplikation τM von τ mit M verwechselt werden! Wenn Missverständnisse zu befürchten sind, schreibt man auch $M\langle \tau \rangle$ anstelle von $M\tau$.

Aus (1) folgert man für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ wieder unter offensichtlichen Voraussetzungen an τ und τ':

(3) $$E\tau = \tau, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_E = \text{id},$$

(4) $$(\lambda M)\tau = M\tau\ , \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{\lambda M} = \Phi_M,$$

(5) $$(LM)\tau = L\langle M\tau\rangle, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M,$$

(6) $$M\tau' - M\tau = \frac{\det M}{(c\tau' + d)(c\tau + d)} \cdot (\tau' - \tau)$$

Schließlich dividiert man (6) durch $\tau' - \tau$ und erhält für $\tau' \to \tau$

(7) $$\Phi'_M(\tau) = \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{\det M}{(c\tau + d)^2}$$

Als Umkehrung von (4) hat man die

Proposition. *Für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ sind äquivalent:*
(i) *$M\tau = L\tau$ gilt für wenigstens drei verschiedene $\tau \in \mathbb{C}$.*
(ii) *Es gibt $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $M = \lambda L$.*

Beweis. Wegen (5) und (3) ist $M\tau = L\tau$ mit $(L^{-1}M)\tau = \tau$ äquivalent. Man kann daher in beiden Fällen ohne Einschränkung $L = E$ annehmen. Da sich $M\tau = \tau$ jetzt als
$$c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0$$
schreibt, folgt die Behauptung. □

Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

(8) $$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, C \in \mathbb{R}\ ,\ A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden. Genauer gilt dann $|B|^2 > AC$ und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r > 0$ werden gegeben durch

(9) $$m = -\overline{B}/A \quad \text{bzw.} \quad r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2.$$

Umgekehrt beschreibt (8) im Fall $A \neq 0$ und $|B|^2 > AC$ stets einen Kreis. Im Fall $A = 0$, $B \neq 0$ erhält man durch (8) genau alle Geraden in $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir betrachten

$$F : \mathbb{E} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \varphi(z)/z, & \text{falls } z \neq 0, \\ \varphi'(0), & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Dann ist F nach dem RIEMANNschen Hebbbarkeitssatz holomorph (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 10.1.1). Für $0 < |z| \leq r < 1$ gilt wegen $\varphi(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ nach dem Maximumprinzip

$$|F(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

Für $r \uparrow 1$ erhält man $|F(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$, d. h.

$$|\varphi(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \quad \text{und} \quad |\varphi'(0)| = |F(0)| \leq 1.$$

Gilt $|\varphi'(0)| = 1$ oder $|\varphi(a)| = |a|$ für ein $0 \neq a \in \mathbb{E}$, so hat man $|F(0)| = 1$ oder $|F(a)| = 1$. Nach dem Maximumprinzip ist F eine Konstante vom Betrag 1, d. h. $F(z) = e^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und somit

$$\varphi(z) = e^{i\lambda} z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}. \qquad \square$$

Damit können wir alle Automorphismen von $\mathbb{E}$ mit Fixpunkt 0 beschreiben.

Lemma. *Für $\varphi \in \text{Aut}\ \mathbb{E}$ gilt genau dann $\varphi(0) = 0$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit*

(3) $$\varphi(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{E}.$$

Beweis. Für φ von der Form (3) gilt $\varphi \in \text{Aut}\ \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$. Sei nun $\varphi \in \text{Aut}\ \mathbb{E}$ beliebig mit $\varphi(0) = 0$. Dann gilt $|\varphi(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$ nach dem SCHWARZschen Lemma. Der gleiche Schluss für φ^{-1} liefert $|\varphi^{-1}(z)| \leq |z|$. Damit erhält man schließlich

$$|z| = |\varphi(\varphi^{-1}(z))| \leq |\varphi^{-1}(z)| \leq |z|,$$

also

$$|\varphi(z)| = |z| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{E}.$$

Nach dem SCHWARZschen Lemma hat φ dann die Form (3). $\square$

3. Aut $\mathbb{H}$. Anstelle von $GL(2;\mathbb{C})$ betrachte man jetzt die Untergruppe $GL(2;\mathbb{R})$ der reellen invertierbaren Matrizen. Für $M \in GL(2;\mathbb{R})$ und $\text{Im}\ \tau \neq 0$ gilt jetzt $M\tau \in \mathbb{C}$. In 1(6) setzt man $\tau' = \overline{\tau}$, beachtet $\overline{M\tau} = M\overline{\tau}$ und erhält

(1) $$\text{Im}\ M\tau = \frac{\det M}{|c\tau + d|^2} \cdot \text{Im}\ \tau.$$

Damit wird $\mathbb{H}$ durch

Bemerkungen. a) Die für 2×2 Matrizen M über einem beliebigen Körper gültige Identität $M^tJM = \det M \cdot J$ zeigt, dass man für die Modulgruppe auch

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ M^tJM = J\}$$

schreiben kann.
b) Im Anschluss an Korollar B kann man zeigen, dass Γ als die Gruppe mit zwei Erzeugenden J und U und den definierenden Relationen $J^4 = U^3 = E$ sowie $J^2U = UJ^2$ beschrieben werden kann. Man vergleiche H. Maass [1983], 54–55.
c) Die Gruppe $PSL(2;\mathbb{Z}) := SL(2;\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ ist wegen Proposition 1.1 und Satz 1.3 kanonisch isomorph zur Gruppe der Modulsubstitutionen. Sie wird erzeugt von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto J\tau = -1/\tau$ und $\tau \mapsto U\tau = 1 - 1/\tau$ der Ordnung 2 und 3. Also ist $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ das freie Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 und 3.
d) Die Bezeichnung der Matrizen (1) mit J bzw. T (wegen „Involution" und „Translation") ist in der Literatur keineswegs verbindlich geregelt. H. Petersson und seine Schüler verwenden die Bezeichnung T bzw. U.

2. Der exakte Fundamentalbereich $\mathbb{F}$. Man definiere

(1) $\mathbb{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau \le \frac{1}{2}\,,\ |\tau| \ge 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < 0\right\}$

und veranschauliche sich $\mathbb{F}$ an der nebenstehenden Figur. Offenbar wird $\mathbb{F}$ von Teilen der Geraden $\mathrm{Re}\,\tau = \pm\frac{1}{2}$ und einem Bogen des Einheitskreises, also von Teilen von Orthogonalkreisen berandet.

$$\overline{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| \le \tfrac{1}{2}, |\tau| \ge 1\},$$
$$\overset{\circ}{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| < \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1\}$$

bezeichne die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von $\mathbb{F}$. Die Randpunkte i und

(2) $\rho := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ mit $\rho^3 = -1$

gehören zu $\mathbb{F}$, während

$$\rho^2 = \rho - 1 = -\overline{\rho} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

zwar zu $\overline{\mathbb{F}}$, aber nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Offenbar gilt

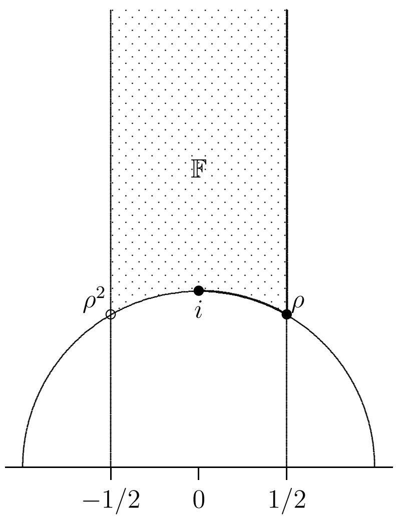

Abb. 16: Der exakte Fundamentalbereich

(3) $$\mathrm{Im}\ \tau \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{für alle } \tau \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Mit den Bezeichnungen 1(1) und 1(6) erhält man den

Satz. a) *Zu jedem* $\tau \in \mathbb{H}$ *gibt es ein* $M \in \Gamma$ *mit* $M\tau \in \mathbb{F}$.
b) *Gehören* τ *und* $M\tau$, $M \in \Gamma$, *zu* $\mathbb{F}$, *so gilt* $\tau = M\tau$. *Ist* $M \neq \pm E$, *so folgt*

entweder

$$\tau = M\tau = i \quad \textit{und} \quad M = \pm J \tag{4}$$

oder

$$\tau = M\tau = \rho \quad \textit{und} \quad M = \pm U, \pm U^2. \tag{5}$$

Aufgrund dieser Eigenschaften nennt man $\mathbb{F}$ einen *exakten Fundamentalbereich* der Modulgruppe Γ.

Beweis. a) Nach Proposition I.1.3 ist das Gitter $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ diskret in $\mathbb{C}$. Es gibt also ein Paar $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(c, d) \neq (0, 0)$ und

$$|m\tau + n| \geq |c\tau + d| \quad \text{für alle} \quad (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (m, n) \neq (0, 0). \tag{6}$$

Natürlich sind c und d dann teilerfremd. Nach dem Ergänzungs–Lemma 1 gibt es nun ein $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ und (6) impliziert $|T^m L\tau| \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Wählt man m geeignet und setzt $\tau' = T^m L\tau = m + L\tau$, dann erhält man

$$-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \tau' \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |\tau'| \geq 1.$$

Im Fall $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \tau' < 0$ und $|\tau'| = 1$ ersetzt man noch τ' durch $J\tau' = -1/\tau' = -\overline{\tau'}$.
b) Im Fall $c = 0$ gilt $M\tau = \tau + m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Aus (1) folgt dann $m = 0$ und $M = \pm E$. Man darf also ohne Einschränkung $c > 0$ annehmen. Für $\tau = x + iy$ erhält man aus 1.3(1) und (3) sofort

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \operatorname{Im}\ M\tau = \frac{y}{|c\tau + d|^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \leq y. \tag{$*$}$$

Behauptung. Es gilt $c = 1$ *und* $d \in \{0, \pm 1\}$.

Beweis. Man hat $|c\tau + d|^2 \geq c^2 y^2$ und $(*)$ ergibt $\frac{3}{4}c^2 \leq 1$, also $c = 1$. Nun gilt aber auch

$$|\tau + d|^2 \geq 2|x + d|y, \quad \text{also} \quad \sqrt{3}|x + d| \leq 1$$

nach $(*)$. Wegen $|x| \leq \frac{1}{2}$ erhält man $|d| \leq 1$. □

Nun werden die Fälle $d = 0$ und $d = \pm 1$ einzeln behandelt:

Der Fall $d = 0$*:* Es folgt $M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^m J$, also $M\tau = m - 1/\tau$. Für $|\tau| > 1$ erhält man aus

$$|\operatorname{Re}(-1/\tau)| = |\operatorname{Re}(\tau)|/|\tau|^2 < 1/2$$

sofort $m = 0$ und $|M\tau| = |-1/\tau| < 1$ als Widerspruch. Also muss $|\tau| = 1$ gelten. Wegen $M\tau = m - \overline{\tau} = (m - x) + iy$ zeigt nun ein Blick auf die Modulfigur, dass

§1. Die elementare Theorie

Ziel dieses Paragrafen ist es, die elementare Theorie modularer Funktionen zu entwickeln und erste Strukturaussagen herzuleiten.
Es wird vereinbart, den Buchstaben M für 2×2 Matrizen zu reservieren und stets $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu schreiben. τ aus der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ wird immer in der Form $\tau = x + iy$ gegeben.

1. Modulare Funktionen. Zunächst wird eine Operation von $SL(2;\mathbb{R})$ auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$ erklärt:
Sei dazu $k \in \mathbb{Z}$ und f auf $\mathbb{H}$ meromorph. Dann existiert eine diskrete und relativ abgeschlossene Teilmenge D_f von $\mathbb{H}$, so dass f auf $\mathbb{H} \backslash D_f$ holomorph ist. Für $M \in SL(2;\mathbb{R})$ erklärt man eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion $f|M = f|_k M$ durch

$$(1) \qquad (f|M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_{f\circ M}.$$

Auf die Angabe des Buchstabens $k \in \mathbb{Z}$ wird hier meist verzichtet. Zusammen mit II.1.1(5) ergibt eine Verifikation

$$(2) \qquad (f|M)|N = f|(MN) \quad \text{für} \quad M, N \in SL(2;\mathbb{R}).$$

Damit definiert $(M, f) \mapsto f|M$ eine Operation auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$, die *Strichoperator* genannt wird.

Man nennt nun f *modular vom Gewicht* k, wenn gilt:

(M.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

Offenbar bilden die modularen Funktionen vom Gewicht k einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. Trägt man $M = -E$ in (M.2) ein, so erhält man die

Proposition. *Jede modulare Funktion von ungeradem Gewicht ist* 0.

Es wird daher im Folgenden stets vorausgesetzt, dass k gerade ist. Wegen (2) und Satz II.2.1 kann man (M.2) ersetzen durch

$$(\text{M.2*}) \qquad f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau).$$

Schließlich zeigt II.1.1(7), dass man (1) auch in der Form

$$(3) \qquad (f|M)(\tau) = \left(\frac{dM\tau}{d\tau}\right)^{k/2} \cdot f(M\tau)$$

schreiben kann.

2. Periodische Funktionen. Es bezeichne wieder

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$$

die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Bekanntlich definiert

$$\mathbb{H} \to \mathbb{E} \setminus \{0\},\ \tau \mapsto z := e^{2\pi i\tau},$$

eine surjektive und modulo 1 periodische holomorphe Funktion. Ist f auf $\mathbb{H}$ meromorph mit Polstellenmenge D_f und periodisch mit der Periode 1 (vgl. I.1.2), dann gibt es bekanntlich (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 12.3.2) eine auf $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ meromorphe Funktion $\hat{f}$ mit

$$f(\tau) = \hat{f}\,(e^{2\pi i\tau}) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f. \tag{1}$$

Ist nun umgekehrt $\hat{f}$ eine auf $\mathbb{E}\setminus\{0\}$ meromorphe Funktion, so ist die zugehörige Funktion f der Form (1) auf $\mathbb{H}$ meromorph und periodisch mit der Periode 1. Man beachte hier, dass sich die Pole von $\hat{f}$ bei 0 häufen können! Um dies auszuschließen, sagt man, dass f *bei* ∞ *höchstens einen Pol* hat, wenn $\hat{f}$ meromorph auf $\mathbb{E}$ fortsetzbar ist.

Hat nun f in diesem Sinne bei ∞ höchstens einen Pol, dann ist 0 eine isolierte Singularität von $\hat{f}$ und es existiert eine Laurent–Entwicklung von $\hat{f}$ um 0 mit endlichem Hauptteil (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 12.2.3)

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m, \tag{2}$$

die in einer punktierten Umgebung von 0 absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Wegen (1) ist dann f in eine Fourier–Reihe

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \tag{3}$$

entwickelbar, die bei geeignetem $\gamma > 0$ für $\operatorname{Im} \tau > \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Die Integralformel für die Koeffizienten der Laurent–Reihe (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], 12.1.3) übersetzt sich dabei in

$$\alpha_f(m) = \int_{w}^{w+1} f(\tau) \cdot e^{-2\pi i m\tau} d\tau, \tag{4}$$

wobei die Integration für $\operatorname{Im} w > \gamma$ z. B. längs der Strecke von w bis $w + 1$ auszuführen ist.

Lemma. *Für eine auf* $\mathbb{H}$ *meromorphe und modulo* 1 *periodische Funktion* $f \neq 0$ *sind äquivalent:*

(i) *f hat bei ∞ höchstens einen Pol.*
(ii) *Es gibt $\gamma > 0$ mit folgenden Eigenschaften:*
  (a) *f ist auf dem Gebiet $\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ \operatorname{Im} \tau > \gamma\}$ holomorph.*
  (b) *Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, so dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein C gibt mit*

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \cdot \mathrm{Im}\,\tau} \quad \textit{für alle } \tau \textit{ mit} \quad \mathrm{Im}\,\tau \geq \gamma + \varepsilon.$$

Dabei ist m_0 das Minimum der $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_f(m) \neq 0$.

Ist dies der Fall und ist f auf $\mathbb{H}$ holomorph, dann gilt (b) *für alle $\gamma > 0$.*

Beweis. Alles wird auf das Verhalten von $\hat{f}$ in einer Umgebung von 0 zurückgespielt: Man hat für $\hat{f}$ genau dann ein LAURENT–Reihe der Form (2), wenn eine Abschätzung der Gestalt $|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0}$ gilt. □

Ist m_0 wie im Lemma gewählt, so sagt man in Übereinstimmung mit dem Verhalten von $\hat{f}$ bei 0, *dass f bei ∞*

einen Pol der Ordnung $-m_0$ hat, falls $m_0 < 0$ gilt,
holomorph ist, falls $m_0 \geq 0$ gilt,
eine Nullstelle der Ordnung m_0 hat, falls $m_0 > 0$ gilt.

Man setzt nun natürlich

$$\mathrm{ord}_\infty f := m_0. \tag{5}$$

3. Der Begriff der Modulform. Eine Funktion f heißt *Modulform vom Gewicht k,* wenn f modular vom Gewicht k ist und bei ∞ höchstens einen Pol hat, wenn also gilt:

(M.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

Wegen Lemma 2 kann hier (M.3) ersetzt werden durch

(M.3*) f besitzt eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die bei geeignetem $\gamma > 0$ für Im $\tau \geq \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert.

Da mit f und g auch $\alpha f + \beta g$, α , $\beta \in \mathbb{C}$, und $f \cdot g$ höchstens einen Pol bei ∞ haben, ergibt ein Blick auf 1(1), *dass die Modulformen vom Gewicht k einen Vektorraum $\mathbb{V}_k$ über $\mathbb{C}$ bilden.* Es gilt außerdem

$$\mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_\ell \subset \mathbb{V}_{k+\ell} \qquad \textit{für} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Wegen Proposition 1 hat man natürlich

$$\mathbb{V}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades} \quad k. \tag{2}$$

Schließlich ist

$$(3) \qquad \tfrac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \qquad \text{für} \quad 0 \neq f \in \mathbb{V}_k \quad .$$

Eine Modulform vom Gewicht 0 heißt eine *Modulfunktion*. Wegen (1) und (3) ist die Menge

$$(4) \qquad \mathbb{K} := \mathbb{V}_0$$

aller Modulfunktionen ein Körper, der die konstanten Funktionen und alle Quotienten von Modulformen desselben Gewichts enthält.

Bemerkungen. a) Der Name *Modulfunktion* stammt von R. DEDEKIND (*Ges. math. Werke I*, 159–172). Eine Modulfunktion tritt zunächst als *Modul* bei elliptischen Integralen in der LEGENDREschen Normalform auf. Es handelt sich dabei allerdings um eine Funktion, die nicht zur Modulgruppe Γ, sondern zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[2]$ gehört (vgl. I.E.2, Korollar I.3.4E, Aufgabe I.4.7). Modulformen treten systematisch zuerst bei WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen als die Invarianten g_2 und g_3 bzw. als Δ auf (vgl. I.4.1), nachdem diese vorher von G. EISENSTEIN betrachtet wurden (vgl. I.3.7).
Eigentliche Begründer der Theorie der Modulfunktionen sind F. KLEIN und H. POINCARÉ. Die Hauptwerke von POINCARÉ zu diesem Thema findet man in den ersten Bänden der Acta Mathematica (nämlich in Band 1, 3, 4, 5) und in seinen *Œuvres II*. Wichtige Arbeiten von KLEIN findet man in seinen *Ges. math. Abhandlungen III*. Die Theorie wurde dann zunächst von R. FRICKE fortgeführt, von dem der ausführliche Übersichtsartikel II.B4 *Automorphe Funktionen* in der *Enzyklopädie der Math. Wissenschaften* stammt.
b) Auf R. DEDEKIND geht die abkürzende Schreibweise $1^\tau := e^{2\pi i\tau}$ zurück (*Ges. math. Werke I*, 174–201), die auch später manchmal verwendet wird, sich aber allgemein nicht durchgesetzt hat.

4. Ganze Modulformen. Eine Modulform f vom Gewicht k heißt eine *ganze Modulform vom Gewicht* k, wenn f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist und wenn f bei ∞ *keinen* Pol hat. Damit ist f genau dann eine ganze Modulform vom Gewicht k, wenn gilt:

(M.1') $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

(M.2') $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3') f ist für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im} \tau \geq \gamma$, $\gamma > 0$, beschränkt.

Wegen Lemma 2 kann man hier (M.3') ersetzen durch

(M.3") f besitzt eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

die für $\gamma > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ \mathrm{Im}\,\tau \geq \gamma\}$ absolut gleichmäßig konvergiert.

Die Menge $\mathbb{M}_k$ *der ganzen Modulformen von Gewicht* k *ist offenbar ein Unterraum des Vektorraums* $\mathbb{V}_k$.

Eine ganze Modulform f heißt eine *Spitzenform* (englisch: *cusp form*), wenn f bei ∞ eine Nullstelle hat, wenn also $\alpha_f(0) = 0$ gilt. Der Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht k wird mit $\mathbb{S}_k$ bezeichnet. Man hat offenbar

$$\mathbb{S}_k \subset \mathbb{M}_k \subset \mathbb{V}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Aus (M.3") folgt sofort

(1) $$\alpha_f(0) = \lim_{y\to\infty} f(iy) \quad \text{für } f \in \mathbb{M}_k.$$

Im Hinblick auf 3(1) erhält man dann

(2) $$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{M}_{k+\ell}, \quad \mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{S}_{k+\ell} \quad \text{für} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen seiner Bedeutung wiederholen wir einen Spezialfall von Lemma 2 als

Lemma. *Ist* $f \in \mathbb{M}_k$ *und* $\gamma > 0$, *so gilt*

$$f(\tau) - \alpha_f(0) = \mathcal{O}\left(e^{-2\pi \mathrm{Im}\,\tau}\right)$$

auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ \mathrm{Im}\,\tau \geq \gamma\}$.

Im weiteren Verlauf werden ausschließlich der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{V}_0$ der Modulfunktionen und die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ der ganzen Modulformen vom Gewicht k studiert.

5. Negatives Gewicht. Für $f \in \mathbb{M}_k$ wird $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

(1) $$\tilde{f}(\tau) := (\mathrm{Im}\,\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|\ ,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

Aus II.1.3(1) und 1(1) erhält man offenbar

(2) $$\tilde{f}(M\tau) = \tilde{f}(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma,$$

so dass $\tilde{f}$ eine unter Γ invariante Funktion ist. Die genaue Kenntnis des exakten Fundamentalbereiches $\mathbb{F}$ aus II.2.2 führt speziell zu der

Proposition. *Ist* $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *für* $\mathrm{Im}\,\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ *beschränkt und gilt*

$$\varphi(M\tau) = \varphi(\tau) \quad \textit{für alle} \ \ M \in \Gamma,$$

dann ist φ *auf* $\mathbb{H}$ *beschränkt.*

Beweis. Nach II.2.2(3) ist φ speziell im Fundamentalbereich $\mathbb{F}$ beschränkt. Nun kann man Satz II.2.2a anwenden und sieht, dass φ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist. □

Als erstes Strukturergebnis erhalten wir den

Satz. *Es gilt* $\mathbb{M}_k = \{0\}$ *für* $k < 0$.

Beweis. Nach (M.3") ist f speziell für alle τ mit $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Da k negativ ist, gilt dies dann auch für $\tilde{f}$. Nun kann man die Proposition auf $\varphi = \tilde{f}$ anwenden und sieht, dass $\tilde{f}$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Man entwickelt f in eine FOURIER–Reihe und erhält für die FOURIER–Koeffizienten gemäß 2(4)

$$\alpha_f(m) = e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx \ , \ m \geq 0.$$

Mit (1) folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x+iy) dx \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my}$$

mit einer von y unabhängigen Konstanten C. Da die linke Seite ebenfalls nicht von y abhängt, kann man den Limes $y \to 0$ bilden und erhält $\alpha_f(m) = 0$ für alle $m \geq 0$, also $f \equiv 0$. □

6. Das Wachstum der FOURIER–Koeffizienten. Für $f \in \mathbb{M}_k$ wird $\tilde{f}$ wie in 5(1) erklärt.

Satz. *Für* $k > 0$ *und* $f \in \mathbb{M}_k$ *gilt:*
a) $\tilde{f}$ *ist genau dann auf* $\mathbb{H}$ *beschränkt, wenn* $f \in \mathbb{S}_k$ *gilt. In diesem Fall existiert ein* $w \in \mathbb{H}$ *mit der Eigenschaft*

$$\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(w) \quad \textit{für alle} \ \ \tau \in \mathbb{H}.$$

b) *Ist* $f \in \mathbb{S}_k$, *so gilt*

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}\big(m^{k/2}\big) \quad \textit{für alle} \ \ m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. a) Ist f eine Spitzenform, so ist $\tilde{f}$ wegen Lemma 4 für $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 5. Ist umgekehrt $\tilde{f}$ beschränkt, so sind wegen Lemma 4 auch $\alpha_f(0) \cdot y^{k/2}$ in $\mathbb{F}$ beschränkt. Aus $k > 0$ folgt $\alpha_f(0) = 0$, also $f \in \mathbb{S}_k$. Die Existenz von w ergibt sich aus $\lim_{y\to\infty} \tilde{f}(\tau) = 0$ nach Lemma 4.
b) Man entwickelt f in eine FOURIER–Reihe und wie im Beweis von Satz 5 folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \qquad \text{für } y > 0.$$

Da die linke Seite nicht von y abhängt, darf man rechts $y = 1/m$, $m > 0$, eintragen und erhält

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot e^{2\pi} \cdot m^{k/2},$$

also die Behauptung. □

Aufgaben. Es bezeichne $A(\mathbb{H})$ die Menge aller modulo 1 periodischen, auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ holomorphen Funktionen $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit zugehöriger FOURIER–Reihe der Form

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\ ,\ \tau \in \mathbb{H},$$

gemäß Lemma 2. $A(\mathbb{H})$ ist offenbar eine $\mathbb{C}$–Algebra, die alle ganzen Modulformen enthält. Es bezeichne $B(\mathbb{H})$ die Teilmenge derjenigen $f \in A(\mathbb{H})$, zu denen es ein $\ell \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1.$$

Für $f \in B(\mathbb{H})$ setzt man

$$\kappa(f) := \inf\left\{\ell \geq 0\ ;\ \alpha_f(m) = \mathcal{O}\left(m^\ell\right) \quad \text{für } m \geq 1\right\}.$$

1) $B(\mathbb{H})$ ist eine Unteralgebra von $A(\mathbb{H})$. Speziell gilt für $f, g \in B(\mathbb{H})$:
   a) $\kappa(f+g) \leq \max\{\kappa(f),\ \kappa(g)\}$,
   b) $\kappa(f \cdot g) \leq \kappa(f) + \kappa(g) + 1$.
2) Ist $f \in A(\mathbb{H})$ und $(\operatorname{Im} \tau)^\kappa \cdot f(\tau)$ für ein $\kappa \geq 0$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt, dann gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq \kappa$.
3) Ist $f \in \mathbb{S}_k$, so gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq k/2$.
4) Ist $f \in B(\mathbb{H})$, so konvergiert die DIRICHLET–Reihe

$$D_f(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot m^{-s}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \kappa(f) + 1$ absolut.
5) Die Funktion $f(\tau) = \vartheta(2\tau)$ (vgl. E.3) gehört zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) = 0$ und $D_f(s) = 2\zeta(2s)$.
6) $B(\mathbb{H})$ ist eine echte Unteralgebra von $A(\mathbb{H})$.
7) Zu $f \in \mathbb{M}_k$ definiert man eine Funktion

$$f^*: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\quad \tau \longmapsto \overline{f(-\overline{\tau})}.$$

Dann gilt $f^* \in \mathbb{M}_k$ und $f^{**} = f$. Die FOURIER–Koeffizienten von f sind genau dann reell, wenn $f^* = f$. Die FOURIER–Koeffizienten von f sind genau dann rein imaginär, wenn $f^* = -f$.
8) $\mathbb{M}_k$ besitzt eine Basis aus ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten.
9) $f \in \mathbb{M}_k$ ist genau dann eine Spitzenform, wenn es zu jedem $\gamma > 0$ positive Konstanten α und β gibt, so dass

$$|f(\tau)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H} \quad \text{mit}\ \ y \geq \gamma.$$

10) Sei $f \in \mathbb{M}_k$ und $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Es gilt $f(i) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod 4$, und $f(\rho) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod 6$.
11) Für $f \in \mathbb{S}_k$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} f(r + iy) = 0.$$

Für $f \in \mathbb{M}_k$, $f \notin \mathbb{S}_k$, $k > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} |f(r + iy)| = \infty.$$